Resumen de conceptos y técnicas comprendidos en el segundo examen parcial

Te propongo que repasemos los conceptos y las técnicas de cálculo estudiados en el segundo cuatrimestre. Lee con atención lo que sigue y no dejes de hacer los ejercicios propuestos, pues los que tengas que hacer en el examen serán muy parecidos a ellos.

Sucesiones y series de funciones

En este capítulo estudiamos los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Como sabes, el *campo de convergencia puntual* de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$; y, supuesto que $C \neq \emptyset$, la *función límite puntual* de $\{f_n\}$ es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ para todo $x \in C$. Se dice también que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en C.

Dado un intervalo $J \subseteq C$, sea $\beta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$. Entonces, si $\lim\{\beta_n\} = 0$, se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* J.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo (es frecuente, además, que dicho límite sea igual a 0). Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse. Supongamos que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x)$, y que el *máximo absoluto* de $f_n(x) - f(x)$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces $\beta_n = f_n(c_n) - f(c_n)$, por lo que si $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(c_n) - f(c_n)\} = 0$, hay convergencia uniforme en J.

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos de la forma $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x\, \mathrm{e}^{-nx}$.

Solución. $f_n(0) = 0$, y si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^k\lambda^n$ donde $0 < \lambda < 1$). Por tanto, la función límite puntal, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x) \geqslant 0$, por lo que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Ahora, como, $f_n'(x) = n^2 \mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$, se deduce que $f_n'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < 1/n$, y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ para todo $x \geqslant 0$. Deducimos que $f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$, y como $f_n(1/n) = n/e$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_o un número natural tal que $\frac{1}{n_o} < a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_o$, tenemos que $[a, +\infty[\subseteq [1/n, +\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$.

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$, $(a>0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x)=\dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1}$.

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia uniforme en $[0,1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in]0,1]$ por $f_n(x)=-x^n\log x$, y $f_n(0)=0$.

Ejercicio 4. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$, $(a>0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x)=n\,\mathrm{sen}(x/n)$.

Ejercicio 5. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n+x}{1+nx}$.

Recuerda que, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1=f_1$, $F_2=f_1+f_2$, $F_3=f_1+f_2+f_3$, en general $F_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$. Los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C=\{x\in I:\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n(x)\ \text{ es convergente}\}$. La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto $A=\{x\in I:\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\ \text{ es convergente}\}$. El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

Criterio de Weierstrass. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ una serie de funciones y A un conjunto tal que para todo $x\in A$ se tiene que $|f_n(x)|\leqslant\alpha_n$, donde la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.

Ejercicio 6. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x)=x^n(\log x)^2$, y $f_n(0)=0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y dedúzcase que $\displaystyle\int_0^1\frac{x(\log x)^2}{1-x}\,dx=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Solución. Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x)=(n\log x+2)x^{n-1}\log x$, se sigue que en el punto $c_n=\exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego $|f_n(x)|=f_n(x)\leqslant f_n(c_n)=\mathrm{e}^{-2}4/n^2$ y, puesto que la serie $\sum\dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Puesto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\frac{x(\log x)^2}{1-x}$, y $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx=2\frac{1}{(n+1)^3}$ (compruébalo integrando por partes), se deduce la igualdad del enunciado.

Ejercicio 7. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Solución. Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Puesto que:

$$\frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2 < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función suma de la serie: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia. Por tanto, para $-1 < x < 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, y

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}dt = \log(1+x) - \log(1-x)$$

y, por tanto, $f(x) = \displaystyle\int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t))\,dt = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$ para todo $x \in]-1,1[$.

Ejercicio 8. Probar la igualdad $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ y obtener el valor de la suma de la serie.

Solución. Tenemos que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3k} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{1+x^3}$, por lo que integrando esta igualdad en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{1+x^3}\,dx$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{1+x^3}\,dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{1+x^3} \right| dx \leqslant \int_0^1 x^{3n+3}dx = \frac{1}{3n+4}$$

obtenemos la igualdad pedida. Finalmente, basta calcular una primitiva y evaluar la integral para obtener la suma de la serie.

Ejercicio 9. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\dfrac{x^{3n}}{2^n}$.

Ejercicio 10. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n(x+3)^n}{2^n}$.

Ejercicio 11. Probar la igualdad $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ y obtener el valor de la suma de la serie.

Ejercicio 12. Expresar la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y deducir el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Cálculo de derivadas parciales de funciones compuestas

Todo lo que necesitas saber para hacer los siguientes ejercicios es aplicar la regla de la cadena para calcular derivadas parciales de funciones compuestas. Puedes completar algunos enunciados con las hipótesis que creas convenientes en cada caso.

Ejercicio 13. Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rs\,\mathrm{e}^{-t}$, $z = r^2s\,\operatorname{sen} t$, calcular el valor de $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Ejercicio 14. Sea $F(x,y) = f(f(x,y), f(x,y))$, donde se supone que f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Aplicando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Comprueba esta igualdad con $f(x,y) = x^2 + 3xy$. ¿Sabes dónde está el error de esta aparente contradicción?

Ejercicio 15. Sea $z = z(x+y, x+3)$. Aplicando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial (x+y)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial (x+3)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

y deducimos que $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, lo que, evidentemente, es (en general) falso. ¿Dónde está el error?

Ejercicio 16. Prueba que la función $F(x,y) = f(\frac{y}{x^2-y^2})$, donde f es una función real derivable, verifica la igualdad

$$(x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Ejercicio 17. Prueba que la función $F(u,v) = f(uv, (u^2-v^2)/2)$, donde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, verifica la igualdad

$$(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2$$

Ejercicio 18. Sea $g(s,t)=f(s^2-t^2,t^2-s^2)$. Probar la igualdad $t\dfrac{\partial g}{\partial s}+s\dfrac{\partial g}{\partial t}=0$.

Ejercicio 19. Sea $z=y+f(x^2-y^2)$. Probar que $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$.

Ejercicio 20. Sea $z=yf(x^2-y^2)$. Probar que $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

Ejercicio 21. Calcula las derivadas parciales de segundo orden de la función $F(x,y)=\displaystyle\int_{xy}^{f(x,y)} g(t)\,dt$.

Ejercicio 22. Supongamos que $f(u,v)$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$. Pongamos $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ y supongamos que $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Probar que la función $f(u(x,y),v(x,y))$ también satisface la ecuación de Laplace.

Ejercicio 23. Sea $z=f(x,y)$, y pongamos $x=u^2+v^2$, $y=u/v$. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de z respecto de las nuevas variables u y v.

Ejercicio 24. Sea $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Probar que $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z^2}=\dfrac{2}{\rho}$.

Ejercicio 25. Supongamos que una función f verifica la ecuación diferencial $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha\sqrt{x^2+y^2}$. Obtener la ecuación diferencial que satisface la función $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$. ¿Cómo son las funciones que satisfacen la ecuación diferencial de partida?

Ejercicio 26. Sea $z=xf(x+y)+yg(x+y)$ donde f y g son funciones dos veces derivables. Probar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Vector gradiente y plano tangente

En los siguientes ejercicios recuerda que si f es una función diferenciable, definida en una región de $\mathbb{R}^3$, la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x,y,z)=c$, en un punto (a,b,c) de la misma, viene dada por $\big(\nabla f(a,b,c)\mid(x-a,y-b,z-c)\big)=0$, donde $\nabla f(a,b,c)\neq 0$ es el vector gradiente de f en el punto (a,b,c) el cual es, como sabes, ortogonal a las superficies de nivel. Si la superficie viene dada como la gráfica de una cierta función g, es decir, de la forma $z=g(x,y)$, entonces puedes reducir este caso al anterior sin más que considerar que la función $f(x,y,z)=g(x,y)-z$ tiene como superficie de nivel $f(x,y,z)=0$ la gráfica de la función g.

Ejercicio 27. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto P_o indicado.

$$z^2-2x^2-2y^2-12=0, \quad P_o(1,-1,4); \qquad z-\log(x^2+y^2)=0, \quad P_o(1,0,0)$$
$$x^2+y^2+z^3-2x+4y+3z+1=0, \quad P_o(3,4,-3); \qquad 4-x^2-4z^2=y, \quad P_o(0,0,1)$$
$$z(xy-1)-(x+y)=0, \quad P_o(1,2,3); \qquad z+\mathrm{e}^z+2x+2y-x^2-y^2-3=0, \quad P_o(1,1+\sqrt{e},1)$$

Ejercicio 28. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección del elipsoide $x^2+4y^2+2z^2=27$ y el hiperboloide $x^2+y^2-2z^2=11$ en el punto $(3,-2,1)$.

Ejercicio 29. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $z=xy$ y $x^2+y^2-2z=4$ en el punto $(3,1,3)$. Comprueba el resultado expresando la curva por sus ecuaciones paramétricas.

Extremos relativos. Derivación implícita y extremos condicionados

En el siguiente ejercicio todo lo que tienes que hacer es aplicar la teoría de extremos relativos.

Ejercicio 30. Determinar los extremos relativos de las funciones:

$$f(x,y)=2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2; \quad f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5; \quad f(x,y)=\frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$$
$$f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20; \quad f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1; \quad f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$$
$$f(x,y)=2x+y+x^2+xy+y^3; \quad f(x,y)=x^2y^2-x^2-y^2; \quad f(x,y)=x\log y-x$$
$$f(x,y)=2x^4+y^4-4x^2-2y^2; \quad f(x,y)=xy(1-x-y); \quad f(x,y)=-4x^3+6x^2y+3y^4-4y^3$$

Los siguientes ejercicios son de derivación de funciones definidas implícitamente y extremos condicionados. Te aconsejo que repases la práctica que hicimos al respecto.

Ejercicio 31. Estudiar la “curva” $\log(x^2+y^2)-\operatorname{arc\,tg}(y/x)=0$ desde el punto de vista de las hipótesis del teorema de la función implícita. Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,0)$.

Ejercicio 32. Estudiar la superficie $z^3+3x^2z=xy$ desde el punto de vista de las hipótesis del teorema de la función implícita. Encontrar la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto $(1,4,1)$.

Ejercicio 33. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por $z^3+z\mathrm{e}^x+\cos y=0$.

Ejercicio 34. Se supone que f es una función diferenciable y que la igualdad $f(cx-az,cy-bz)=0$ define a z como función de x,y. Probar que $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

Ejercicio 35. Supongamos que la igualdad $g(x,f(x,z),z)=0$, donde g, f son funciones diferenciables de tres y dos variables respectivamente, define a z como función de x. Calcular la derivada $z'(x)$.

Ejercicio 36. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función $z=z(x,y)$ dada implícitamente por $3x^2y^2+2z^2xy-2zx^3+4zy^3-4=0$, en el punto $(2,1)$ siendo $z(2,1)=2$.

Ejercicio 37. ¿En qué puntos de la superficie $-2x^2+64x-4y^2+64y+z^2-768=0$ no está definido el plano tangente?

Ejercicio 38. Supongamos que la igualdad $F(x,y,z)=0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$. Probar que $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

Ejercicio 39. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por $f(x+z,y)=0$, donde se supone que f es una función de dos variables de clase C^2.

Ejercicio 40. Supongamos que la igualdad

$$\int_{xy}^{y+z} g(t)dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t)dt = 0$$

donde g y h son funciones reales derivables, define a z como función implícita de x,y. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de $z=z(x,y)$.

Ejercicio 41. Se supone que las igualdades $x^2+y^2+z^2=3$ y $x^2+3xy-2z=0$, definen funciones implícitas $y=y(x)$, $z=z(x)$ tales que $y(1)=-1$, $z(1)=1$. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{y(x)+z(x)}{x-1}$.

Ejercicio 42. El plano $x+y+z=24$ corta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Calcula los puntos más altos y más bajos de dicha elipse.

Ejercicio 43. Determinar y clasificar los extremos de la función $f(x,y,z)=z$ sujetos a la restricción $g(x,y,z)=z+\mathrm{e}^z+2x+2y-x^2-y^2-3=0$.

Ejercicio 44. Determinar y clasificar los extremos de $f(x,y,z)=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$ sujetos a la restricción $2x^2+3y^2+6z^2=1$.

Ejercicio 45. Determinar los puntos sobre la curva $x^2y=2$ más próximos al origen.

Ejercicio 46. Hallar el punto de la recta intersección de los planos $x-y=2$ y $x-2z=4$, que está más próximo al origen.

Ejercicio 47. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=x^2+3y^2$ en el círculo $x^2-2x+y^2-3\leqslant 0$.

Ejercicio 48. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ en el recinto limitado por las cuatro rectas $y=\pm1\pm x$.

Ejercicio 49. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ en el rectángulo definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

Ejercicio 50. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y)=48xy-32x^3-24y^2$ en el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Ejercicio 51. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2y^3(1-x-y)$ en la región dada por $K=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$.

Ejercicio 51. Hallar el volumen máximo de una caja rectangular situada sobre el plano XY que tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto pertenece al plano $6x+4y+3z=24$.

Ejercicio 52. Hallar el volumen máximo de una caja rectangular situada sobre el plano XY que tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto pertenece al paraboloide $z+x^2+4y^2=4$.

Ejercicio 53. Calcular el volumen de la caja rectangular más grande, de lados paralelos a los planos coordenados y cuyos vértices están sobre el elipsoide $9x^2+36y^2+4z^2=36$.

Ejercicio 54. Calcula los puntos de la superficie $xy^2z^3=2$ que están más cerca del origen.

Ejercicio 55. Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=(x^2+2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ en el disco $x^2+y^2\leqslant 4$.

Ejercicio 56. Calcular los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y,z)=xyz$ en el conjunto $K=\{(x,y,z):x^2+4y^2+9z^2\leqslant 3\}$.

Ejercicio 57. Calcular el mayor valor de $f(x,y,z)=xy^2z^3$ en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Ejercicio 58. Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie $f(x,y,z)=0$. Sean $x=x(t)$, $y=y(t)$, las coordenadas x e y de la partícula en el tiempo t.

a) Calcular el vector velocidad $\mathbf{v}$ y la energía cinética $K=\frac{1}{2}m\parallel\mathbf{v}\parallel^2$.

b) Calcular el vector aceleración $\mathbf{a}$.

Ejercicio 59. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

Ejercicio 60. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$.

Ejercicio 61. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por $x^3+y^3+z^3-3x-3y+z+4=0$.

Ejercicio 62. Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z)=xyz$ cuando el punto (x,y,z) pertenece a la curva definida por la intersección del plano $x+y+z=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Ejercicio 63. Calcular las dimensiones de una caja rectangular sin tapadera de volumen dado V que tenga mínima superficie lateral.

Integrales dobles y triples

Como sabes, si $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, es un *"conjunto de tipo I"*, es decir, puede ser descrito de la forma $\Omega=\{(x,y):x\in I\wedge g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\}$ donde $I\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo y, g, h son funciones reales definidas en I, entonces:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)d(x,y)=\int\limits_{I}\left[\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

Análogamente, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, es un *"conjunto de tipo II"*, es decir, si $\Omega = \{(x,y) : y \in J \wedge \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$ donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y, φ, ψ son funciones reales definidas en I, entonces:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{J} \left[\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Con frecuencia es posible describir Ω de las dos formas indicadas y habrá que elegir la que facilite en mayor medida los cálculos.

Análogamente, si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ puede representarse en la forma $A = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega \wedge g(x,y) \leqslant z \leqslant h(x,y)\}$, donde Ω es la proyección de A sobre el plano XY, y g, h son funciones reales definidas en Ω, entonces:

$$\iiint\limits_{A} f(x,y,z)d(x,y,z) = \iint\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \right] d(x,y)$$

Naturalmente, en $\mathbb{R}^3$ hay más posibilidades, pero la idea es siempre la misma: se obtiene primero la proyección de A sobre uno de los ejes o sobre uno de los planos coordenados, y para cada punto fijado en dicha proyección se obtiene el conjunto de los puntos de A que lo proyectan. Si, por ejemplo, la proyección de A sobre el eje OZ es un intervalo J, y para cada $z \in J$ es $A_z = \{(x,y) : (x,y,z) \in A\}$, entonces:

$$\iiint\limits_{A} f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_{J} \left[\iint\limits_{A_z} f(x,y,z)d(x,y) \right] dz$$

Fíjate que el orden en que efectuemos las integrales iteradas no importa. Estos resultados son consecuencia del importante teorema de Fubini que estudiarás el próximo curso. Otro resultado muy útil para calcular integrales múltiples es el teorema del cambio de variables que establece la siguiente igualdad:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u,v))|\det J_{\varphi}(u,v)|d(u,v)$$

donde φ es un difeomorfismo de Δ sobre Ω.

Ejercicio 64. Calcular en cada caso la integral de la función f en el conjunto A.

a) $f(x,y) = x+2y$; A es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$, $y = 1+x^2$.

b) $f(x,y) = xy$; A es la región acotada por la recta $y = x-1$ y la parábola $y^2 = 2x+6$.

c) $f(x,y) = x^2y^2$; A es la región acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x/2$, $y = 3x$. (Sugerencia: hacer un cambio de variables apropiado)

e) $f(x,y) = x+y+1$; A es la región acotada por las rectas $y-x = 1$, $y-x = -1$, $y+x = 1$, $y+x = 2$. (Sugerencia: hacer un cambio de variables apropiado)

f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; A es el cuadrado de vértices $(0,2),(1,1),(2,2),(2,3)$.

Ejercicio 65. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1-x^2-y^2$.

Ejercicio 66. Calcular el volumen del conjunto $\{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2x\}$.

Ejercicio 67. Calcular el volumen limitado por el paraboloide elíptico $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=z$ y el plano $z=7$.

Ejercicio 68. Calcular la integral de $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}$ en el conjunto A acotado por el paraboloide $y=x^2+z^2$ y el plano $y=4$.

Ejercicio 69. Calcular la integral de $f(x,y,z)=\exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ en la bola unidad $B=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

Ejercicio 70. Calcular el centroide de una lámina que ocupa la parte del disco de centro 0 y radio r que está en el primer cuadrante del plano.

Ejercicio 71. Calcular $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,d(x,y)$, donde D es el dominio acotado por la curva $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)^4=\dfrac{xy}{\sqrt{6}}$ que está en el primer cuadrante.

Ejercicio 72. Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dz\right]dy\right]dx.$

Ejercicio 73. Calcula, por medio de una integral triple, el volumen de la pirámide limitada por los planos $x=0$, $z=0$, $x=2y$, $x+2y+z=2$.

Ejercicio 74. Calcula, por medio de una integral doble y un cambio de variable apropiado, el área de la región acotada por las dos elipses $x^2+4y^2=4$, $x^2+4y^2=16$.

Ejercicio 75. Calcula, por medio de una integral doble y un cambio de variable apropiado, el área de la región del primer cuadrante definida por

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4\leqslant\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$$

donde a,b,h,k son constantes positivas. Sugerencia: $x=a\rho\cos^2\theta$, $y=a\rho\operatorname{sen}^2\theta$.

Ejercicio 76. Calcular el volumen de la región limitada por los dos elipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1$$

Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 77. Una función tal que $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ se llama *homogénea* de grado n.

a) Prueba que si f es una función homogénea de grado n y diferenciable se verifica

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=nf(x,y)$$

b) Prueba que la ecuación diferencial $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, donde P y Q son funciones homogéneas tiene a $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$ como factor integrante.

c)Resuelve la ecuación $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$.

Ejercicio 78. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales sabiendo que admiten un factor integrante μ de la forma indicada:

a) $(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0, \quad \mu(x,y)=\varphi(x+y^2)$

b) $(5x^2-4xy-y)dx+(3y-x^2-2x)dy=0, \quad \mu(x,y)=\varphi(x^2-y)$

c) $(x^2+y^2-1)dx-2xydy=0, \quad \mu(x,y)=\varphi(y^2-x^2)$

Ejercicio 79. Halla una curva que pase por el punto $(0,2)$ y que verifique que la pendiente de su tangente en cada punto sea igual a la ordenada del punto aumentada en tres unidades.

Ejercicio 80. Hallar una curva tal que la pendiente de de su tangente en cada punto sea n veces la pendiente de la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas.

Ejercicio 81. Hallar una curva tal que la tangente en cada punto (x,y) de la misma corte al eje OY en el punto $(0,2xy^2)$.